Ensimag 2A – hiver 2019
TDs optimisation numérique
Jérôme Malick, Dmitry Grishchenko, Yassine Laguel

TD 3 – Conditions d'optimalité KKT convexes

Exercice 1 – Exo du cours avec une contrainte en plus. Soient les deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, $e = [1, \ldots, 1]^\top$ et $c = [1, 0, \ldots, 0]^\top$. Résoudre le problème

$$\begin{cases} \max \quad c^\top x \\ \quad e^\top x = 0 \\ \quad \|x\|^2 \leqslant 1. \end{cases}$$

Visualiser, sur un dessin, le problème et la solution en dimension $n = 2$.

Exercice 2 – Contraintes actives. Soit l'ensemble $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x + y \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\right\}$.

a) Dessiner C. En considérant les contraintes actives, exhiber 7 zones dans C.

b) Écrire les conditions d'optimalité de KKT de la minimisation de la fonction $f(x, y) = \exp(x - y) - x - y$ sur C. Sont-elles nécessaires et/ou suffisantes ?

c) Trouver le minimum global de cette fonction sur C.

Exercice 3 – Minimisation convexe paramétrique. Soient la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

$$f_a(x, y) = x^2 + \alpha y^2 + xy + x$$

pour un paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ et le problème

$$\begin{cases} \min \quad f_\alpha(x, y) \\ \quad x + y - 1 \leqslant 0. \end{cases}$$

a) Quand le problème est-il convexe ?

b) Le résoudre dans ce cas.

Exercice 4 – Problème quadratique sous contraintes linéaires. Résoudre le problème

$$\begin{cases} \min \quad \frac{1}{2} x^\top Q\, x + p^\top x + c \\ \quad Ax = b, \end{cases}$$

dans le cas où $Q \in \mathcal{S}_n^{++}$, et A est surjective.

Solution : avec $B = AQ^{-1}A^\top$ (inversible),

$$\lambda^* = -B^{-1}(AQ^{-1}c + b)$$

ce qui donne

$$x^* = -Q^{-1}c + Q^{-1}A^\top B^{-1}(AQ^{-1}c + b).$$