Jérôme Malick, Dmitry Grishchenko, Yassine Laguel

TD 1 – Rappels de calcul différentiel et débuts avec l'optimisation

Exercice 1 – Différentiabilité de la norme au carré. Calculer, avec simplement la définition, la différentielle en $a \in \mathbb{R}^n$ de l'application $\|\cdot\|^2$, norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$ au carrée. En déduire son gradient en $a \in \mathbb{R}^n$. Retrouver cette expression en utilisant les dérivées partielles.

Exercice 2 – Appliquer le lemme de différentiation d'une composée.

a) Soient A une matrice de taille $m\times n$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^m$; on définit l'application $f(x) := \|Ax-b\|^2$ pour $x \in \mathbb{R}^n$. Calculer $\nabla f(x)$.

b) Soit $G\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable ; on définit l'application $\varphi(x) := \|G(x)\|^2$ pour $x \in \mathbb{R}^n$. Calculer $\nabla\varphi(x)$.

Exercice 3 – Hessien. Calculer le gradient et le Hessien des fonctions suivantes :

a) $f(x) := x^\top A\, x + p^\top x + c$, avec A une matrice symétrique de taille n, p un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et c une constante réelle.

b) $g(x) := \sum_{i=1}^m g_i(x)^2$, avec $g_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ des fonctions 2 fois différentiables.

Exercice 4 – Conditions d'optimalité. Soient $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable, et $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

a) Pour toute direction $u \in \mathbb{R}^n$, on définit l'application $q(t) := f(\bar{x} + t\,u)$ pour $t \in \mathbb{R}$. Calculer $q'(t)$.

b) Supposons que f soit deux fois différentiable. Calculer $q''(t)$.

On suppose que f admet un minimum local en $\bar{x}$, c'est-à-dire

$$\text{pour tout } x \text{ dans un voisinage de } \bar{x}, \qquad f(x) \geqslant f(\bar{x}).$$

c) En utilisant le développement de Taylor-Young de la fonction q au premier ordre en 0, montrer que $\nabla f(\bar{x}) = 0$.

d) En utilisant le développement au second ordre, montrer que $\nabla^2 f(\bar{x})$ est « semidéfinie positive » (ce qui est aussi appelé « positive », c'est-à-dire que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, on a $u^\top \nabla^2 f(\bar{x})\, u \geqslant 0$).

e) Pour le cas de la dimension $n = 2$, donner les conditions sur les dérivées partielles équivalentes aux deux propriétés des questions précédentes.

Exercice 5 – Problème séparable.

a) Soient $f\colon X \to \mathbb{R}$ et $g\colon Y \to \mathbb{R}$; montrer que l'on peut « découpler » la minimisation de $f + g$:

$$\inf_{(x,y)\in X\times Y} f(x) + g(y) \;=\; \left(\inf_{x\in X} f(x)\right) + \left(\inf_{y\in Y} g(y)\right)$$

Montrer aussi que si le minimum est atteint pour f par $\bar{x} \in X$ et pour g par $\bar{y} \in Y$, alors $(\bar{x}, \bar{y})$ atteint le minimum de $f + g$ sur $X \times Y$.

b) Soient $c, \ell, u \in \mathbb{R}^n$; résoudre explicitement la minimisation de $c^\top x$ sous la contrainte $\ell \leqslant x \leqslant u$ (minimiser une fonction linéaire sur un rectangle).

Exercice 6 – Lemme de descente. Soit une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differentiable telle que son gradient $\nabla f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est L-Lipchitz, c'est-à-dire, que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leqslant L\|x - y\|.$$

a) Se rappeler le « théorème fondamental de l'analyse » qui donne ici, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x) - f(y) = \int_0^1 (x-y)^\top \nabla f(y + t(x-y)) \mathrm{d}t$$

b) En déduire que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) \leqslant f(y) + (x-y)^\top \nabla f(y) + \frac{L}{2}\|x-y\|^2$$

c) Donner une fonction f pour laquelle l'égalité est atteinte dans l'ingalit ci-dessus (et une autre pour laquelle elle ne l'est pas).